§ Дифференциалдық теңдеулердің жалпылама шешімнің кіргізудің екі тәсілі

Дербес туындылы дифференциалдық теңдеулерге қойылған есептің бастапқы мәні, шекаралық мәні және теңдеудің оң жағы керекті туындыларымен үзіліссіз болса, онда біз теңдеудің туындысының ретіне сәйкес үзіліссіз (туындысымен қоса үзіліссіз) шешім табамыз. Оны классикалық шешім деп атаймыз. Бірақ, физикалық және басқа да есептерде бастапқы мән, шекаралық мән жеткілікті тегіс бола алмайды, сондықтан есепті шешкен кезде жеткілікті тегіс болатын шешім болуына күмән келтіреді. Сонымен, дифференциалдық теңдеулерге жалпылама шешім ұғымын енгіземіз. Дербес туындылы дифференциалдық теңдеулердің жалпылама шешім теориясымен С.Л.Соболев, К.О.Фридрихс, Л.Шварц айналысқан.

Жалпылама шешімді екі тәсілмен енгізуге болады:

1 тәсіл Жалпылама шешім классикалық шешімдер тізбегінің шегі түрінде анықталады.

2 тәсіл Дифференциалдық теңдеулер шекаралық, бастапқы мәндерімен бірге интегралдық қатынас түрінде беріледі.

Мысал

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial x} \tag{1}$$

$$u(0,x) = \varphi(x) \tag{2}$$

Егер $\varphi(x) \in C^1[a,b]$ болса, онда $\Omega = \{x,t : a \le x+t \le b\}$ облысындағы (1),(2) есептің шешімі келесі түрде болады:

$$u(t,x) = \varphi(x+t). \tag{3}$$

Шынында да,

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad \varphi(x+t)\big|_{t=0} = \varphi(x).$$

Айталық, $\varphi(x) \in C[a,b]$ болсын, бірақ дифференциалданбасын. Онда (1),(2) есептің шешімін қалай анықтаймыз? Оны келесі түрде анықтаймыз: бұл функцияны $[a,b]$ аралығындағы туындысымен үзіліссіз, бірқалыпты жинақталатын $\varphi_k(x)$ тізбегінің шегі ретінде болатыны айқын. Сондықтан, (1) теңдеудің сәйкес $u_k(x,t) = \varphi_k(x,t)$ шешімі $\overline{\Omega}$ облысында (3) функцияға бірқалыпты жинақталады. Осы айтылған тұжырым жалпылама түсінікте $\varphi(x+t)$ функциясы (1) теңдеудің шешімі болуына негізделді.

Анықтама 1 Егер тегіс классикалық шешімдер тізбегі $\{u_k(x)\}$ табылып және ол $u(x)$ функциясына белгілі бір нормада жинақталса, яғни

$C(\Omega)$ кеңістігінде $\sup\limits_{x\in\Omega}|u_k(x) - u(x)| \to 0, \quad k \to \infty,$ ал $L_2(\Omega)$ кеңістігінде $\int\limits_{\Omega} |u_k(x) - u(x)|^2 dx \to 0, \quad k \to \infty,$

онда $u(x), \quad x \in \Omega \subset R^n$ функциясы Ω облысындағы дифференциалдық теңдеудің жалпылама шешімі деп аталады.

L_2 кеңістігіндегі жалпылама шешім үзілісті болатыны айқын. Шекке ұмтылуды басқа да функционалдық кеңістіктер нормасымен анықтауға болады.

Шешім ұғымы кеңейтілгендіктен жалпылама шешімнің жалғыздығын дәлелдеу керек және бастапқы, шекаралық мәндерді қай мәнде қанағаттандыратынын білуіміз керек.

Сызықтық эллиптикалық және параболалық теңдеулер үшін жеткілікті тегіс коэффициенттер, бастапқы және шекаралық мәндері болса, онда жалпылама шешім ұғымын кіргізудің қажеті жоқ. Бірақ, егер осы теңдеулерде тегіс емес коэффициенттер, бастапқы және шекаралық мәндері болса, онда жалпылама шешімді енгіземіз, өйткені классикалық шешім табылмауы мүмкін.

Жалпылама шешімді басқаша енгізу үшін интегралдық тепе-теңдікті қолданамыз. Бұл екінші тәсіл арқылы ұғымдарды кеңейтеміз, осының негізінде жалпылама функция ұғымын аламыз.

Анықтама 2 Айталық, келесі түрдегі диффференциалдық теңдеу берілсін:

$$Lu \equiv \sum_{|\alpha|\le m} a_\alpha(x) D^\alpha u = f(x), \quad x \in \Omega, \tag{4}$$

мұндағы $a_\alpha(x) \in C^\infty(\Omega), \quad f(x) \in D'(\Omega),$ яғни $f(x) - D'$ облысындағы жалпылама функция.

$\forall \varphi(x) \in D$ үшін келесі теңдік орындалса

$$\left(u, \sum_{|\alpha|\le m} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha (a_\alpha, \varphi) \right) = (f, \varphi), \tag{5}$$

онда $u(x) \in D'$ жалпылама функциясы $Lu = f$ теңдеуінің Ω облысындағы жалпылама шешімі деп аталады. Егер $u(x), \quad f(x)$ функциялары локалды интегралданатын функциялар болса, онда соңғы теңдіктегі функционал сәйкес интеграл түрінде беріледі, яғни (4) теңдеуді φ функциясына көбейтіп, Ω облысы бойынша бөліктеп интегралдаймыз.

Жоғарыда айтылған жалпылама шешімдерде екі проблема бар:
1. Дифференциалдық теңдеудің жалпылама шешімін тапқан кезде шекаралық шартты ескеру керек. Жалпылама шешім бастапқы және шекаралық шарттарды қай мағынада қанағаттандырады? Егер функция n өлшемді облыс бойынша Лебег мағынасында интегралданатын функция болса, онда осы өлшемнен кем көпбейнеде анықталмауы мүмкін.
2. Шешім ұғымын кеңейткеннен кейін жалпылама шешімнің жалғыздығын дәлелдеу қиын.

§ Соболевтің жалпылама туындылары және оның қасиеттері

$\Omega \subset R^n$ (шенелген немесе шенелмеген) облысты және $\varphi(x) \in C_0^\infty(\Omega)$ функциясын қарастырайық, яғни $\varphi(x) \in C^\infty(\Omega)$ және Ω облысында компакт тұғыры бар: $x \in \Omega \setminus K$ үшін $\varphi(x) = 0$, мұнда $K - \Omega$ облысындағы компакт облыс. Онда тегіс $u(x)$ функциясы үшін бөліктеп интегралдау формуласы бойынша келесі теңдік орынды:

$$\int_\Omega \frac{\partial u(x)}{\partial x} \varphi dx = (-1)\int_\Omega u(x) \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx.$$

Бұл формула жалпылама туындының негізі ретінде алынады. Айталық, $u(x)$, $\omega_i(x) -$ жай функциялар типтес жалпылама функциялар болсын, яғни

$$u(x), \quad \omega_i(x) \in L_{1,loc}(\Omega) = \left\{ \upsilon(x) \middle| \forall K \subset \Omega, \int_K |\upsilon(x)| dx < \infty \right\}.$$

Анықтама1 Егер $\forall \varphi(x) \in C_0^\infty(\Omega)$ функциясы үшін $\omega_i(x) \in L_{1,loc}(\Omega)$ функциясы табылса және келесі теңдік орындалса:

$$\int_\Omega \omega_i(x)\varphi(x)dx = (-1)\int_\Omega u(x) \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx$$

онда $\omega_i(x) \in L_{1,loc}(\Omega)$ функциясы $u(x) \in L_{1,loc}(\Omega)$ функциясының 1 ретті жалпылама туындысы деп аталады және $\omega_i = \dfrac{\partial u}{\partial x_i} \in L_{1,loc}(\Omega)$ арқылы белгіленеді. Осылайша, кез келген α ретті жалпылама туындыларды анықтауға болады, мұндағы $\alpha = \alpha_1 \quad \ldots \quad \alpha_n -$ мультииндекс.

Анықтама $1'$ Егер $\forall \varphi(x) \in C_0^\infty(\Omega)$ функциясы үшін

$$\int_\Omega \omega_\alpha(x)\varphi(x)dx = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega u(x) D^\alpha \varphi(x) dx \tag{1}$$

тепе-теңдік орындалса, онда $\omega_\alpha(x) \in L_{1,loc}(\Omega)$ функциясы $u(x) \in L_{1,loc}(\Omega)$ функциясының Ω облыс бойынша α ретті жалпылама туындысы деп аталады және $\omega_\alpha(x) = \dfrac{\partial^\alpha u}{\partial x_1^{\alpha_1} \quad \partial x_2^{\alpha_2} \quad \ldots \quad \partial x_n^{\alpha_n}} \equiv D^\alpha u$ арқылы белгіленеді.

Жалпылама туынды - классикалық туындының кеңейтілуі болатыны айқын.

Лемма 1 Айталық, $\Omega \subset R^n$ және $D^\alpha u(x) \in C(\Omega)$ болсын. Яғни Ω-ның әрбір нүктесінде жай туындысы болса, онда $D^\alpha u$ функциясы $u(x)$ функциясының Ω облыс бойынша α ретті жалпылама туындысы болады.

Дәлелдеуі: (1) тепе-теңдіктен шығады.

Лемма 2 $u(x)$ функциясының жалпылама туындысы эквивалентті класс дәлдікпен жалғыз болады.

Дәлелдеуі: Айталық, $\Omega \subset R^n$, $\alpha \neq 0$ және $u(x)$, $\upsilon_1(x)$, $\upsilon_2(x) \in L_{1,loc}(\Omega)$ функциялары және $\upsilon_1 = D^\alpha u$, $\upsilon_2 = D^\alpha u$ болсын. υ_1 және υ_2 функцияларының Ω облысында эквивалентті болатынын көрсетейік. $\forall \varphi(x) \in C_0^\infty(\Omega)$ функциясы үшін

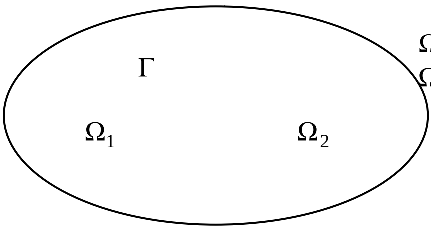
$$\int_\Omega \upsilon_1 \varphi dx = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega u \frac{\partial^\alpha u}{\partial x^\alpha} dx$$

$$\int_\Omega \upsilon_2 \varphi dx = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega u D^\alpha u dx$$

тепе-теңдіктері орынды. Бұдан $\int_\Omega (\upsilon_1 - \upsilon_2)\varphi dx = 0;$ вариациялық қисап курсынан Ω облысында нөл өлшемді дәлдікпен $\upsilon_1 = \upsilon_2$, яғни υ_1 және υ_2 функциялары Ω облысында эквивалентті.

Жалпылама туындылар классикалық туындылардың кейбір қасиеттерін сақтайды. **Негізгі қасиеттері** жалпылама туындылардың анықтамасынан тікелей шығады.

1. (Сызықтық қасиеті) Егер u_1 және u_2 функцияларының Ω облысында жалпылама туындылары болса, онда $C_1u_1+C_2u_2$ қосындының да Ω облысында жалпылама туындылары бар, яғни $D^{\alpha}\left(C_1u_1+C_2u_2\right)=C_1D^{\alpha}u_1+C_2D^{\alpha}u_2$, мұнда $C_1,\quad C_2-$ тұрақтылар.
2. Егер Ω облысында $\upsilon=D^{\alpha}u$ жалпылама туынды болса, ал Ω облысында $\omega=D^{l}\upsilon$ жалпылама туындысы болса, онда $\omega=D^{\alpha+l}u$ болады.
3. Жалпылама туынды анықтамасы бойынша $D^{\alpha}u=\dfrac{\partial^{\alpha}u}{\partial x_1^{\alpha_1}\quad\partial x_2^{\alpha_2}\quad\dots\quad\partial x_n^{\alpha_n}}$ дифференциалдың ретінен тәуелсіз.
   Бірақ, жалпылама туындыға классикалық туындының барлық қасиеттері орындалмайды.
4. $\dfrac{\partial\left(u_1\cdot u_2\right)}{\partial x_i}$ дифференциалдың көбейтіндісі орындалуы үшін қосымша шарттар қоюымыз керек: $u_k,\ \dfrac{\partial u_k}{\partial x_i}\in L_2(\Omega),\quad k=1{,}2$ немесе жалпы жағдайда $u_1,\ \dfrac{\partial u_2}{\partial x_i}\in L_{p,loc}(\Omega)$ болса, онда қажетті шарт $u_2,\ \dfrac{\partial u_1}{\partial x_i}\in L_{p',loc}(\Omega)$ орындалуы керек, мұнда $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{p'}=1$. Бұл Гельдер теңсіздігінен шығады. Сондықтан, $\dfrac{\partial\left(u_1\cdot u_2\right)}{\partial x_i}=u_1\dfrac{\partial u_2}{\partial x_i}+u_2\dfrac{\partial u_1}{\partial x_i},\quad i=1,\quad 2,\quad\dots\quad n.$
5. $\dfrac{\partial^{\alpha}u}{\partial x_1^{\alpha_1}\quad\partial x_2^{\alpha_2}\quad\dots\quad\partial x_n^{\alpha_n}}$ жалпылама туындысы болса, бұдан төменгі ретті жалпылама туындысы бар деп айтуға болмайды. Осы фактарды ”Соболевтің енгізу теоремалары” анықтайды.
6. $u\in D^{\alpha}(\Omega)$ болса, онда $u\in D^{\alpha}(\Omega')$, мұнда $\Omega'\subset\Omega$.. Ω облысы үш бөлікке бөлінеді: Ω_1 және Ω_2, Γ.



Анықтама 2 Айталық; $\Omega\subset R^n,\quad\alpha=\alpha_1\quad\dots\quad\alpha_n,\quad\alpha\neq 0$ болсын. Егер $L_{1,loc}(\Omega)$ кеңістігінде $\forall u_n(x)\in C^{\infty}(\Omega):\quad u_n(x)\underset{n\to\infty}{\to}u(x),\quad D^{\alpha}u_n(x)\underset{n\to\infty}{\to}\omega_{\alpha}(x)$ шарттары орындалса, онда $\omega_{\alpha}(x)\in L_{1,loc}(\Omega)$ функциясы $u(x)\in L_{1,loc}(\Omega)$ функциясының Ω облыс бойынша α ретті жалпылама туындысы деп аталады.

$L_{1,loc}(\Omega)$ кеңістігінде $u_k(x)\to u(x)\quad\Leftrightarrow\quad\lim\limits_{k\to\infty}\quad\left\|u_k(x)-u(x)\right\|_{L_1(\Omega)}=0,\quad\forall K\subset\Omega-\Omega$ облысындағы компакт облыс болады.

Анықтама 3 $\Rightarrow$ Жалпылама дифференциал амалы $C^{\infty}(\Omega)$ кеңістігінде берілген функцияның жай дифференциалдық амалының $L_{1,loc}(\Omega)$ мағынасындағы минималь тұйық кеңейтілуі болады.

§ Жалпылама функцияның жалпылама туындысының анықтамасы

Жалпылама функциялар теориясында жалпылама функциядан алынған жалпылама туынды сызықтық функционал ретінде анықталады.

Егер $\forall\varphi(x)\in D(\Omega)$ үшін

$$\left(D^{\alpha}u,\varphi(x)\right)=(-1)^{|\alpha|}\left(u(x),D^{\alpha}\varphi(x)\right)\tag{1}$$

теңдігі орындалса, онда $D^{\alpha}u$ функциясы $u(x)\in D'(\Omega)$ функциясының Ω облыс бойынша α ретті жалпылама туындысы деп аталады.

Егер $D^{\alpha}u,\quad u(x)\in L_{1,loc}(\Omega)$, яғни регулярлы жалпылама функциялар болса, онда (1) функцонал келесі түрде болады:

$$\int\limits_{\Omega}D^{\alpha}u\varphi(x)dx=(-1)^{|\alpha|}\int\limits_{\Omega}u(x)D^{\alpha}\varphi(x)dx,\quad\forall\varphi(x)\in C_0^{\infty}(\Omega)$$

Бұл Соболев мағынасындағы жалпылама туындысының анықтамасы. Яғни $u(x)$, $D^{\alpha}u(x)-$локалды интегралданатын функциялар болса, жалпылама функцияның жалпылама туындысы Соболев мағынасындағы жалпылама туындысымен беттеседі.

$W_2^1(\Omega)$ Соболев кеңістігі және оның қасиеттері

Анықтама $u(x),\quad x\in\Omega\subset R^n$ функциялар жиынын қарастырайық және келесі шарттар орындалсын:

1) $u(x)\in L_2(\Omega)$;

2) $\forall i=1,\ 2,\ \dots,\ n,\ \exists\dfrac{\partial u}{\partial x_i}$ – жалпылама туындысы және $\dfrac{\partial u}{\partial x_i}\in L_2(\Omega),\quad i=\overline{1,n}$.

Осы функциялар жиынына келесі түрдегі норманы енгізейік.

$$\|u\|=\left\{\int_\Omega\left[\sum_{i=1}^n\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2+u^2\right]dx\right\}^{\frac12}\tag{1}$$

және 2) $\Rightarrow$ осы жиынның элементтері үшін (1) норма әруақытты да ақырлы шама болады. Бұл жиын (1) нормамен $W_2^1(\Omega)$ Соболев кеңістігі деп аталады және $\|u\|_{W_2^1(\Omega)}$ немесе $\|u\|_{2,\Omega}^{(1)}$, $\|u\|_{W^{2,1}(\Omega)}$ түріндегі белгілеулер қалыптасқан.

Ескерту $L_2(\Omega)\subset L_{1,loc}(\Omega)$ болатындығын көрсетейік: Айталық, $u(x)\in L_2(\Omega)$ болсын. Онда $\forall K\subset\Omega$ компакт үшін $\int_K|u(x)|dx<\infty$ дұрыс. Шынында да, $\forall K\subset\Omega$ компакт және Коши-Буняковский теңсіздігінің көмегімен $\int_K|u(x)|dx\le\left(\int_K dx\right)^{1/2}\left(\int_K|u|^2dx\right)^{1/2}=(mesK)^{1/2}\cdot C$ яғни $u(x)\in L_{1,loc}(\Omega)$ аламыз.

$W_2^1(\Omega)$ кеңістігінде Гильберттік құрылымды кіргізуге болады. Яғни, $\forall\,u(x),\quad \upsilon(x)\in W_2^1(\Omega)$ функциялары үшін сан сәйкес қоямыз:

$$\int_\Omega\left[\sum_{i=1}^n\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial\upsilon}{\partial x_i}+u\cdot\upsilon\right]dx=\{u,\upsilon\}\tag{2}$$

Онда $W_2^1(\Omega)$ кеңістігі – нақты Гильберттік кеңістік және (2) скалярлық көбейтінді келесі қасиеттерге ие:

1. Симметриялық қасиеті: $\{u,\upsilon\}=\{\upsilon,u\}$;
2. Дистрибутивтік қасиеті: $\{u,\upsilon_1+\upsilon_2\}=\{u,\upsilon_1\}+\{u,\upsilon_2\}$;
3. Біртектілік қасиеті: $\{\lambda u,\upsilon\}=\lambda\{u,\upsilon\}$, мұнда λ – нақты сан $\left(\lambda\in R^1\right)$;
4. Теріс еместігі: $\{u,u\}\ge0$ және $\{u,u\}=0$ теңдігі тек қана $u=0$ (барлық дерлік) болғанда орындалады.

§ $W_2^1(\Omega)$ Соболев кеңістігінің толық екенін дәлелде.

Анықтама $u(x),\quad x\in\Omega\subset R^n$ функциялар жиынын қарастырайық және келесі шарттар орындалсын:

1) $u(x)\in L_2(\Omega)$;

2) $\forall i=1,\ 2,\ \dots,\ n,\ \exists\dfrac{\partial u}{\partial x_i}$ – жалпылама туындысы және $\dfrac{\partial u}{\partial x_i}\in L_2(\Omega),\quad i=\overline{1,n}$.

Осы функциялар жиынына келесі түрдегі норманы енгізейік.

$$\|u\|=\left\{\int_\Omega\left[\sum_{i=1}^n\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2+u^2\right]dx\right\}^{\frac12}\tag{1}$$

және 2) $\Rightarrow$ осы жиынның элементтері үшін (1) норма әруақытта да ақырлы шама болады. Бұл жиын (1) нормамен $W_2^1(\Omega)$ Соболев кеңістігі деп аталады.

Сұрақ $W_2^1(\Omega)$ кеңістігі толық кеңістік бола ма?

Теорема (1) нормаға қатысты $W_2^1(\Omega)$ кеңістігі толық метрикалық кеңістік болады.

Дәлелдеуі $\{u_k(x)\},\quad u_k(x)\in W_2^1(\Omega)$ тізбегін қарастырайық және оны $W_2^1(\Omega)$ кеңістігінде фундаменталды деп ұйғарайық, яғни $\|u_k-u_l\|_{W_2^1(\Omega)}\to0,\quad k,l\to\infty.$.

Онда (1) норма анықтамасынан

$$\int_\Omega (u_k(x)-u_l(x))^2 dx \to 0, \quad \int_\Omega \left(\frac{\partial u_k}{\partial x_i}-\frac{\partial u_l}{\partial x_i}\right)^2 dx \to 0, \quad k,l \to \infty, \quad \forall i=1,\dots,n$$ шығады.

Бірақ, $L_2(\Omega)-$толық кеңістік, сондықтан $u(x),\ \omega_i(x)\ \left(i=\overline{1,n}\right)$ функциялары табылып $u(x),\ \omega_i(x)\in L_2(\Omega)$ және

$$\int_\Omega (u_k(x)-u(x))^2 dx \to 0, \quad k\to\infty \tag{2}$$

$$\int_\Omega \left(\frac{\partial u_k}{\partial x_i}-\omega_i(x)\right)^2 dx \to 0, \quad k\to\infty, \quad i=\overline{1,n}. \tag{3}$$

$\omega_i(x)=\dfrac{\partial u}{\partial x_i}$ Соболев мағынасындағы жалпылама туынды болатынын көрсетейік. $u_k(x)$ функциясының жалпылама туындысы бар: $\dfrac{\partial u_k}{\partial x_i}\in L_2(\Omega)\subset L_{1,loc}(\Omega)$, онда $\forall\varphi(x)\in C_0^\infty(\Omega)$ функциясы үшін

$$\int_\Omega \frac{\partial u_k}{\partial x_i}\varphi(x)dx=(-1)\int_\Omega u_k\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}dx \tag{4}$$

теңдігі орындалады.

(2), (3) тізбектердің жинақтылығынан келесі теңдіктерді аламыз:

$$\lim_{k\to\infty}\int_\Omega \frac{\partial u_k}{\partial x_i}\varphi dx=\int_\Omega \omega_i\varphi dx \tag{5}$$

$$\lim_{k\to\infty}\int_\Omega u_k(x)\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}dx=\int_\Omega u(x)\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}dx. \tag{6}$$

(4) тепе-теңдіктен шекке көшіп, (5), (6) теңдіктерден

$\displaystyle\int_\Omega \omega_i(x)\varphi(x)dx=(-1)\int_\Omega u(x)\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}dx \quad\Rightarrow\quad \omega_i(x)=\frac{\partial u}{\partial x_i}$ Соболев мағынасындағы жалпылама туындысын аламыз.

Бұдан $u(x)\in W_2^1(\Omega)$. Егер (3)-тегі ω_i функциясының орнына $\dfrac{\partial u}{\partial x_i}$-ті қойып және (2) пен (3) қоссақ, онда $W_2^1(\Omega)$ нормасындағы жинақтылықты аламыз:

$\|u_k-u\|_{W_2^1(\Omega)}\to 0,\quad k\to\infty.$ Бұл $W_2^1(\Omega)$ кеңістігінің толықтығын көрсетеді. Теорема дәлелденді.

§ $W_p^l(\Omega)$ Соболев кеңістігі

$W_2^1(\Omega)$ кеңістігіне ұқсас етіп $W_p^l(\Omega)$ кеңістігін енгізуге болады. p дәрежесімен интегралданатын, бүтін l ретке дейінгі жалпылама туындылары бар $u(x)\in L_p(\Omega),\quad 1\le p<\infty$ функциялар жиынын қарастырайық.

Осы жиында келесі норманы енгізейік:

$$\|u\|_{W_p^l(\Omega)}=\left\{\int_\Omega\sum_{|\alpha|\le l}\left|\frac{\partial^{|\alpha|}u}{\partial x_1^{\alpha_1}\ \dots\ \partial x_n^{\alpha_n}}\right|^p dx\right\}^{1/p}. \tag{1}$$

Бұл кеңістік $W_p^l(\Omega)$ Соболев кеңістігі деп аталады.

$W_p^l(\Omega)$ Банах кеңістігі, оның толықтығы $W_2^1(\Omega)$ кеңістігінің толықтығына ұқсас дәлелденеді.

$p=2$ болса $W_p^l(\Omega)$ кеңістігі келесі түрдегі скаляр көбейтіндімен Гильберттік кеңістік құрайды:

$$\{u,\upsilon\}_{W_2^l(\Omega)}=\int_\Omega\sum_{|\alpha|\le l}D^\alpha u D^\alpha \upsilon dx.$$

Бұл жағдайда $W_2^l(\Omega)$ кеңістігін $H^l(\Omega)$ белгілейді.

$C^\infty(\Omega)$ жиынның функциясын алып, (1) нормамен тұйықтап $W_p^l(\Omega),\quad p\ge 1,\quad l\ge 1$ Соболев кеңістіктерін алуға болады. Функция осы тұйықтауда жатады және $\widehat{W}_p^l(\Omega)$ кеңістігін анықталады.. Ω облысының шекарасы ”жаман емес” болса, $W_p^l(\Omega)$ кеңістігі $\widehat{W}_p^l(\Omega)$ кеңістігімен беттеседі. Бұл жерде “жұлдызды облыстар” және жұлдызды облыстардың ақырлы қосындысы деген ұғымды келтіреміз:

Анықтама Егер $x_0 \in \Omega$ ішкі нүктесі табылып, осы нүктеден шыққан радиус-векторлар облыстың шекарасымен бір ғана ортақ нүктесі болса, онда Ω облысы “жұлдызды облыс” (немесе x_0 нүктесіне қатысты жұлдызды облыс)деп аталады. Егер $B_r \subset \Omega$ шардың әрбір нүктесіне қатысты жұлдызды облыс болса, онда B_r шарына қатысты жұлдызды облыс болады.